Colles de Maths - semaine 18
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Uniforme continuité

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \geq 0,\ |f(x)| \leq ax + b.$$

Exercice 2

1. Montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites $(x_n)_n, (y_n)_n$ à valeurs dans I,
$$x_n - y_n \to 0 \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$
2. Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas uniformément continue.

Développements limités

Exercice 3 Déterminer le développement limité à l'ordre 8 de Arcsin en 0.

Exercice 4 Déterminer le développement limité à l'ordre 5 de $\ln\left(\dfrac{\operatorname{th} x}{x}\right)$ en 0.

Exercice 5 Déterminer un développement généralisé à trois termes en $+\infty$ de $x \exp\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)$.

Espaces vectoriels

Exercice 6 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, E^* son espace dual.

1. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. On note e_i^* l'application qui à un vecteur $x \in E$ fait correspondre sa coordonnée devant e_i. Montrer que $(e_i^*)_i$ est une base de E^*.
2. Réciproquement, soit $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E^*.
   Montrer qu'il existe une base (e_i) de E telle que pour tout i, $e_i^* = f_i$.
3. Montrer qu'en dimension infinie, si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, la famille $(e_i^*)_i$ est toujours libre mais jamais génératrice.

Exercice 7 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$
2. $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f) = \{0\}$
3. $E = \operatorname{Im}(f) + \operatorname{Ker}(f)$
4. $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$

Exercice 8 Soit E un K-espace vectoriel, soient p et q deux projecteurs sur E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Si les conditions du 1. sont vérifiées, décrire le projecteur $p + q$.